Notas sobre el Capítulo 1
Conceptos Matemáticos Previos

1 Vectores

El símbolo de permutación

- El símbolo de permutación, ϵ_{ijk}, se define:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{Si } i,j,k \text{ no son distintos} \\ 1 & \text{Si } i,j,k \text{ es permutación par de 1,2,3} \\ -1 & \text{Si } i,j,k \text{ es permutación impar de 1,2,3} \end{cases}$$

- Su empleo facilita enormemente el manejo de determinantes, empezando por la expresión misma de éstos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}.$$

- Por ello, resulta también útil para trabajar con productos vectoriales. En particular:

$$\vec{\mathrm{u}}_i \times \vec{\mathrm{u}}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \vec{\mathrm{u}}_k, \qquad \text{de donde :} \qquad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} a_j b_k,$$

- Dos propiedades útiles:

$$\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}; \qquad \sum_i \sum_j \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}.$$

Cambios de base

• El cambio de una base cartesiana $\{\vec{\mathrm{u}}_i\}$ a otra $\left\{\vec{\mathrm{u}'}_i\right\}$ viene caracterizado por la matriz de transformación Γ, cuyo significado geométrico es:

$$\vec{\mathrm{u}'}_i = \sum_k \gamma_{ik} \vec{\mathrm{u}}_k.$$

• Esta matriz es ortogonal, es decir cumple:

$$\sum_k \gamma_{ik}\gamma_{jk} = \sum_k \gamma_{ki}\gamma_{kj} = \delta_{ij},$$

su determinante vale la unidad, y su inversa es igual a su traspuesta.

• Las componentes de un vector cualquiera se transforman como sigue:

$$a'_j = \sum_i \gamma_{ji} a_i. \qquad \longleftrightarrow \qquad [\vec{a}]' = \Gamma\, [\vec{a}]\,,$$

con $[\vec{a}]'$ la matriz columna de las componentes de $\vec{a}$ en la base $\left\{\vec{\mathrm{u}'}_i\right\}$, y $[\vec{a}]$ lo mismo en la base $\{\vec{\mathrm{u}}_i\}$.

• La matriz de la transformación inversa es la inversa de la de la transformación directa (y por tanto es también igual a la traspuesta de ésta, propiedad que poseen todas las matrices ortogonales).

$$\Gamma' = \Gamma^{-1} = \Gamma^{\mathrm{t}}.$$

2 Coordenadas curvilíneas ortogonales

Definiciones

• Cualquier sistema de ternas (q_1, q_2, q_3) que gozan de una relación biunívoca con los puntos del espacio se llama *coordenadas curvilíneas*

• Superficie coordenada: lugar geométrico de los puntos del espacio que verifican:

$$q_i = \text{cte}.$$

- Línea coordenada: intersección de dos superficies coordenadas.

- Sistema de coordenadas curvilineas ortogonales: aquél en que, en todo punto, las tres superficies coordenadas son mútuamente perpendiculares.

Vectores de la base

- El vector unitario, $\vec{\mathrm{e}}_i$, tangente a la línea coordenadas i es:

$$\vec{\mathrm{e}}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \qquad \text{con} \qquad h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| \qquad \text{el factor de escala.}$$

Cada terna de vectores $\vec{\mathrm{e}}_i$ constituye una base ortonormal definida en un punto del espacio. Por tanto, cualquier vector $\vec{a}$ puede expresarse como:

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{\mathrm{e}}_i.$$

- Las derivadas de los vectores de la base valen:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_j}{\partial q_i} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial q_j}\,\vec{\mathrm{e}}_i \quad (\text{si } i \neq j); \qquad \frac{\partial \vec{\mathrm{e}}_i}{\partial q_i} = -\sum_{l \neq i} \frac{1}{h_l}\frac{\partial h_i}{\partial q_l}\,\vec{\mathrm{e}}_l.$$

Vectores desplazamiento y velocidad. Elementos de línea y de volumen

El vector desplazamiento infinitesimal, $d\vec{r}$, es:

$$d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\,dq_i = \sum_i h_i dq_i \vec{\mathrm{e}}_i,$$

De aquí la velocidad, el elemento de línea y el elemento de volumen:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_i h_i \frac{dq_i}{dt}\,\vec{\mathrm{e}}_i; \qquad (d\vec{r})^2 = \sum_i h_i^2 \left(dq_i\right)^2;$$

$$dV = (h_1 dq_1 \vec{\mathrm{e}}_1) \cdot [(h_2 dq_2 \vec{\mathrm{e}}_2) \times (h_3 dq_3 \vec{\mathrm{e}}_3)] = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Coordenadas cilíndricas y esféricas

- Coordenadas cilíndricas

$$\left.\begin{array}{rl} q_1 = & r \\ q_2 = & \phi \\ q_3 = & z \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1 = & r\cos\phi \\ x_2 = & r\sin\phi \\ x_3 = & z \end{array}\right.$$

Vectores tangentes a las líneas coordenadas y factores de escala:

$$\begin{array}{rcl} h_r = 1 & \longleftarrow & \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\phi\,\vec{\mathrm{u}}_1 + \sin\phi\,\vec{\mathrm{u}}_2 \\ h_\phi = r & \longleftarrow & \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -r\sin\phi\,\vec{\mathrm{u}}_1 + r\cos\phi\,\vec{\mathrm{u}}_2 \\ h_z = 1 & \longleftarrow & \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{\mathrm{u}}_3 \end{array}$$

- Coordenadas esféricas

$$\left.\begin{array}{rl} q_1 = & r \\ q_2 = & \theta \\ q_3 = & \phi. \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1 = & r\cos\theta\cos\phi \\ x_2 = & r\cos\theta\sin\phi \\ x_3 = & r\sin\theta. \end{array}\right.$$

Vectores tangentes a las líneas coordenadas y factores de escala:

$$\begin{array}{rcl} h_r = 1 & \longleftarrow & \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\theta\cos\phi\,\vec{\mathrm{u}}_1 + \cos\theta\sin\phi\,\vec{\mathrm{u}}_2 + \sin\theta\,\vec{\mathrm{u}}_3; \\ h_\theta = r & \longleftarrow & \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\cos\phi\,\vec{\mathrm{u}}_1 - r\sin\theta\sin\phi\,\vec{\mathrm{u}}_2 + r\cos\theta\,\vec{\mathrm{u}}_3; \\ h_\phi = r\cos\theta & \longleftarrow & \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -r\cos\theta\sin\phi\,\vec{\mathrm{u}}_1 + r\cos\theta\cos\phi\,\vec{\mathrm{u}}_2. \end{array}$$

3 Operadores diferenciales en coordenadas curvilineas

- Gradiente:

$$\vec{\nabla}\Phi = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\,\vec{\mathrm{e}}_i,$$

- Divergencia:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2 h_3 a_1\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_1 h_3 a_2\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(h_1 h_2 a_3\right)\right].$$

- Rotacional:

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{\mathrm{e}}_1 & h_2\vec{\mathrm{e}}_2 & h_3\vec{\mathrm{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}.$$

- Laplaciano de una función escalar:

$$\nabla^2\Phi \equiv \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi\right) =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial q_3}\right)\right].$$

- Laplaciando de una función vectorial:

$$\nabla^2\vec{a} \equiv \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right).$$

- Derivada direccional de un escalar y de un vector:

$$\vec{n}\cdot\vec{\nabla}b = \sum_i \frac{n_i}{h_i}\frac{\partial b}{\partial q_i}; \qquad \left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} = \sum_i \frac{n_i}{h_i}\frac{\partial \vec{a}}{\partial q_i},$$

$$\left[\left(\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a}\right]_j = \vec{n}\cdot\vec{\nabla}a_j + \frac{1}{h_j}\sum_i \frac{a_i}{h_i}\left(n_j\frac{\partial h_j}{\partial q_i} - n_i\frac{\partial h_i}{\partial q_j}\right).$$

4 Tensores cartesianos

Definición

Dada una base ortonormal, un tensor es un conjunto de nueve números reales (componentes) ordenados conforme a dos índices, a_{ij} $(i = 1, 3; j = 1, 3)$, que al cambiar a otra base ortonormal cuya matriz de transformación sea Γ, se transforman conforme a:

$$a'_{ij} = \sum_k \sum_l \gamma_{ik} \gamma_{jl} a_{kl}.$$

Ordenando las componentes del tensor en forma de matriz 3×3, A:

$$A' = \Gamma A \Gamma^{\mathrm{t}}.$$

Operaciones, propiedades, definiciones

• Producto tensorial: dados $\hat{A}$ y $\hat{B}$ de rangos n y m, se llama producto tensorial a otro tensor $\hat{C}$ de rango $n + m$ definido:

$$\hat{C} = \hat{A} \otimes \hat{B} \qquad \Longleftrightarrow C_{i_1 i_2 \cdots i_n j_1 j_2 \cdots j_m} = A_{i_1 i_2 \cdots i_n} B_{j_1 j_2 \cdots j_m}.$$

• Contracción total de dos tensores de rango 2:

$$\hat{T} : \hat{S} = \sum_i \sum_j T_{ij} S_{ij}.$$

• Producto de un tensor por una vector: es un vector definido:

$$\vec{y} = \hat{T} \vec{x} \Longleftrightarrow y_i = \sum_j T_{ij} x_j.$$

Esta operación es una aplicación lineal entre vectores cuya matriz es la del tensor.

• Todo tensor de rango 2 puede descomponerse de forma unívoca en la suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico:

$$\hat{T} = \hat{S} + \hat{A} \Longleftrightarrow S_{ij} = \frac{1}{2} \left(T_{ij} + T_{ji} \right); \qquad A_{ij} = \frac{1}{2} \left(T_{ij} - T_{ji} \right).$$

- Dual de un tensor antisimétrico $\hat{\Omega}$: es un vector $\vec{\omega}$ definido:

$$\omega_i = \frac{-1}{2} \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \Omega_{jk},$$

Dos propiedades útiles:

$$\Omega_{ij} = -\sum_k \epsilon_{ijk} \omega_k; \qquad \hat{\Omega} \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

Diagonalización

- Dado un tensor $\hat{T}$, se llama autovector de éste a todo vector que cumpla:

$$\hat{T} \vec{v} = \lambda \vec{v},$$

y λ recibe el nombre de autovalor asociado al autovector $\vec{v}$.

- Los autovalores de un tensor son las raíces de la ecuación característica:

$$|T - \lambda I| = 0,$$

Los autovectores asociados a un autovalor son las soluciones del sistema de ecuaciones homogéneas que resulta al sustituir el autovalor en:

$$\left(\hat{T} - \lambda \hat{I} \right) \vec{v} = \vec{0}$$

Si los tres autovalores, λ_1, λ_2 y λ_3 son reales y distintos, los correspondientes autovectores constituyen una base en la que el tensor se diagonaliza:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

- Si el tensor es simétrico se verifica:

$$\vec{x} \cdot \left(\hat{T} \vec{y} \right) = \vec{y} \cdot \left(\hat{T} \vec{x} \right).$$

y además todas las raices de la ecuación característica son reales. El tensor tiene, al menos, un conjunto de tres autovectores ortogonales, pudiendo darse los siguientes casos:

1. Todos los autovalores son distintos. Entonces la base en que $\hat{T}$ se diagonaliza es única.

2. Hay dos raices iguales, $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, entonces todo vector perpendicular a $\vec{v}_1$ es autovector correspondiente a λ_2.

3. Los tres autovalores sean iguales, entonces cualquier vector es autovector del tensor.

5 Teoremas diferenciales

• Teorema de Gauss: dada una región R, y $\vec{n}$ un vector unitario definido en cada punto de ∂R perpendicular a ella y apuntando hacia fuera de R, y dada una función diferenciable, $f(\vec{r})$:

$$\int_R \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \oint_{\partial R} f n_i dS.$$

• Teorema de Stokes: dada una superficie S limitada por una curva cerrada ∂S, y una función vectorial diferenciable $\vec{a}$:

$$\sum_i \int_S \left(\sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} n_i \right) dS = \oint_{\partial S} \left(\sum_i a_i \tau_i \right) dl,$$

con τ_i las componentes del vector $\vec{\tau}$, unitario y tangente a ∂S. Las a_k son, en general, las tres componentes de cualquier tensor diferenciable correspondientes a un mismo índice.