

CONCEPTOS MATEMÁTICOS PREVIOS

EJERCICIOS

1. Demostrar:

- (a) Que $\vec{a} \cdot \vec{b}$ es un escalar. (Es decir, permanece invariante al efectuar un cambio de base ortogonal).
- (b) Que $\vec{a} \times \vec{b}$ es un vector. (Es decir, al efectuar un cambio de base ortogonal, sus componentes se transforman como las de un vector).
- (c) Que $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ es un vector.
- (d) Que $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ es un escalar. A la vista de esto último, ¿Puede decirse que el símbolo de permutación, ϵ_{ijk} , es un tensor de rango 3?

2. Haciendo uso de la propiedad del símbolo de permutación:

$$\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl},$$

demostrar:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3. El sistema de coordenadas paraboloidales (u, v, ϕ) se define como sigue:

$$\begin{aligned}x_1 &= uv \cos \phi \\x_2 &= uv \sin \phi \\x_3 &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\end{aligned}$$

con $u \geq 0$, $v \geq 0$. Calcular las expresiones del gradiente de una función escalar y la divergencia de una función vectorial, en función de estas coordenadas.

4. Demostrar que los tensores nulo, unidad y expansión isotrópica (homotecia) son invariantes. (Tienen la misma forma en cualquier base ortonormal).
5. A partir de la definición de dual de un tensor antisimétrico:

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \Omega_{jk},$$

demostrar la siguiente relación:

$$\Omega_{ij} = -\sum_k \epsilon_{ijk} \omega_k.$$

Demuéstrese también que:

$$\hat{\Omega} \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

6. Demostrar que la simetría de la matriz que representa un tensor es una propiedad invariante. Idem para la antisimetría.
7. Demostrar que $\hat{S} : \hat{T}$ es un escalar, y que $\vec{a} \otimes \vec{b}$ es un tensor.
8. Demostrar que la ecuación característica de un tensor es invariante.
9. Demostrar que la divergencia de un tensor cartesiano, $\vec{\nabla} \cdot \hat{T}$, definida como un "vector" cuyas componentes i vienen dadas por:

$$(\vec{\nabla} \cdot \hat{T})_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j},$$

es efectivamente un vector.

10. El tensor $\hat{T}$ está dado en una cierta base ortonormal por la matriz:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular sus autovalores y sus autovectores. Determinése la matriz de la transformación ortogonal para la que la matriz que representa al tensor se diagonaliza.