

Appendix A

Breve repaso de las ecuaciones de la mecánica de fluidos

A.1 Derivadas materiales y teorema del transporte de Reynolds

Definimos una partícula de fluido como una porción infinitesimal de éste que, aunque al moverse cambie de posición, tamaño y forma, siempre contenga la misma sustancia.

Si la partícula posee una cierta cantidad de una magnitud física escalar, α , el ritmo total de variación que esa magnitud sufre se evalúa mediante un operador que recibe el nombre de *derivada material* o *derivada lagrangiana*, y se suele denotar $D\alpha/Dt$. Como, en general, α es función de la posición y el tiempo [$\alpha = \alpha(t, \vec{r})$], la derivada material viene dada por:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\alpha \quad (A.1)$$

Desde un punto de vista físico el primer término del segundo miembro, que recibe el nombre de *derivada euleriana*, da cuenta del hecho de que α varía con el tiempo en cada punto fijo del espacio, es decir, cuantifica la variación intrínseca de α en el punto que ocupa la partícula en el instante t . Por su parte, el segundo término da cuenta de que, como en general la partícula se está moviendo, α variará debido a que durante el tiempo dt la partícula se está desplazando a otro punto próximo en el que α tiene, en el mismo instante, un valor distinto del que tenía en el punto inicial. Para

entenderlo mejor, considérese el caso en que el campo α es estacionario, es decir, no varía con el tiempo en un punto fijo y por tanto $\partial\alpha/\partial t = 0$, a pesar de lo cual α varía debido al movimiento de la partícula. Esta variación es precisamente la que es cuantificada por el término advectivo.

Para una magnitud vectorial, la derivada material viene dada por:

$$\frac{D\vec{\alpha}}{Dt} = \frac{\partial\vec{\alpha}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\alpha} \quad (A.2)$$

con $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$ el operador definido $\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ en coordenadas cartesianas.

Consideremos ahora una porción finita de material constituida por un conjunto concreto de partículas de fluido, un *trozo de fluido*. La región del espacio, $R(t)$, que éste ocupa, en general, variará con el tiempo. Sea una magnitud física extensiva, A , definida en el seno del fluido. La cantidad de esa magnitud contenida en un instante dado en el trozo de fluido, $A(t)$, viene dada por:

$$A(t) = \int_{R(t)} a(t, \vec{r}) dV$$

donde $a(t, \vec{r})$ es el campo de densidad de esa magnitud: $a(t, \vec{r}) = dA(t, \vec{r})/dV$.

Al cabo de un tiempo, el trozo de fluido se habrá movido y su forma y volumen habrán cambiado. También la cantidad que posee de la magnitud considerada habrá variado por haberlo hecho la de cada una de las partículas que la componen. El *teorema del transporte de Reynolds* establece cuánto vale esta variación:

$$\frac{DA}{Dt} = \int_{R(t)} \left(\frac{Da}{Dt} + a \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) dV \quad (A.3)$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{D}{Dt} \int_{R(t)} a(t, \vec{r}) dV = \int_{R(t)} \left[\frac{\partial a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (a\vec{v}) \right] dV \quad (A.4)$$

Para entender el significado de cada término de esta expresión aplicamos el teorema de la divergencia al segundo de dentro de la integral obteniendo:

$$\frac{D}{Dt} \int_{R(t)} a(t, \vec{r}) dV = \int_{R(t)} \frac{\partial a}{\partial t} dV + \oint_{\partial R(t)} a\vec{v} \cdot d\vec{S},$$

que nos dice que el ritmo al que cambia la cantidad de magnitud A tiene dos contribuciones:

1. La integral extendida a la región que el trozo de fluido ocupa instantáneamente, $R(t)$, del ritmo al que cambia a . Esta integral da cuenta del cambio de A debido a que a cambia localmente en cada punto de dicha región.
2. El flujo neto de a a través de la superficie $\partial R(t)$ que limita a $R(t)$. Este término da cuenta de la variación de A debida a que éste $R(t)$ cambia (se desplaza y/o se deforma).

Para el caso de una magnitud vectorial, la expresión del teorema de Reynolds es:

$$\frac{D}{Dt} \int_{R(t)} \vec{a} dV = \int_{R(t)} \left[\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] dV \quad (A.5)$$

A.2 La ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es la expresión matemática de la conservación de la masa para un fluido.

Consideremos una porción finita de material de fluido que en un instante dado ocupa una región del espacio $R(t)$. Su masa es:

$$M = \int_{R(t)} \rho dV$$

que, como se conserva, debe verificar que $DM/Dt = 0$, o sea:

$$\int_{R(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0$$

Como esta expresión es válida para cualquier porción de fluido, el integrando debe ser nulo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (A.6)$$

que es la *ecuación de continuidad*.

A.3 El tensor de esfuerzos

Las fuerzas que una partícula de fluido puede sufrir se clasifican en dos tipos.

En primer lugar están las *fuerzas de volumen*, que son ejercidas por agentes externos y actúan sobre la totalidad del volumen de la partícula; un ejemplo típico es la fuerza de gravedad.

El otro tipo, las *fuerzas de superficie*, son ejercidas sobre cada elemento de fluido por los elementos adyacentes a él, y lo hacen actuando a través de la superficie común que los limita. Son debidas al transporte de momento a nivel microscópico en el seno del fluido.

Dado un elemento de superficie situado en un punto del espacio $\vec{r}$ y orientado según la dirección y sentido del vector unitario $\vec{n}$, se define el esfuerzo ejercido a través de ella, $\vec{t}(\vec{n}, \vec{r})$, como la fuerza por unidad de área ejercida a través de dicho elemento por el fluido situado en la región del espacio hacia la que apunta $\vec{n}$ sobre la que se encuentra al otro lado. Un ejemplo de esfuerzo es la presión.

Los esfuerzos se caracterizan matemáticamente mediante un tensor llamado “tensor de esfuerzos” $\hat{T}$, de modo que el esfuerzo realizado a través de un elemento como el anteriormente descrito es:

$$\vec{t}(\vec{n}, \vec{r}) = \hat{T}(\vec{r})\vec{n},$$

por tanto, dado un elemento de superficie $d\vec{S} = \vec{n}dS$, la fuerza total que ejercen las fuerzas de superficie a través de él es:

$$d\vec{F}_S = \vec{t}dS = \hat{T}\vec{n}dS = \sum_i \vec{e}_i \sum_j T_{ji}n_jdS.$$

A la vista de esto se puede decir que la componente cartesiana del tensor de esfuerzos, T_{ij} , es la componente según el eje x_i del esfuerzo ejercido a través de un elemento de superficie orientado según el vector de la base $\vec{e}_j$. Este tensor es simétrico.

Los elementos de la diagonal de la matriz que representa al tensor de esfuerzos se llaman *esfuerzos normales*, ya que T_{ii} es la componente normal del esfuerzo que actúa sobre un elemento de superficie orientado perpendicular al eje X_i . El resto de los elementos de la matriz se llaman *esfuerzos tangenciales* o *de cizalladura* (“shear stress”).

Vamos a ver ahora qué forma tiene el tensor de esfuerzos, para ello nos basamos en varios hechos experimentales:

1. En equilibrio, cualquier elemento de área del fluido experimenta una fuerza perpendicular a ella, compresiva e independiente de su orientación. Por tanto, en equilibrio:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} \implies \hat{T} = -p\hat{I}$$

con p la presión hidrostática.

En general $\hat{T}$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$\hat{T} = -p\hat{I} + \hat{W} \quad (A.7)$$

con $\hat{W}$ el llamado tensor de esfuerzos viscosos, que da origen a fuerzas tangenciales.

2. Sólo deben existir fuerzas internas de fricción (esfuerzos tangenciales) cuando un elemento de fluido se mueva respecto a los adyacentes. Esto quiere decir que $\hat{W}$ debe depender de las derivadas espaciales de la velocidad.

Si los gradientes de velocidad en el seno del fluido son pequeños, las fuerzas viscosas dependerán sólo de las derivadas primeras; un fluido de este tipo se llama newtoniano.

Por otra parte, si el movimiento del fluido es de rotación rígida no deben aparecer esfuerzos viscosos, ya que no hay deslizamiento de unos elementos respecto de los adyacentes; por tanto, los esfuerzos viscosos no pueden depender de combinaciones de las derivadas espaciales de la velocidad del tipo $\Omega_{ji} = (\partial v_i / \partial x_j) - (\partial v_j / \partial x_i)$, lo que por otra parte era de esperar, ya que, según se ha dicho, $\hat{T}$ es simétrico.

Teniendo en cuenta estas propiedades se puede demostrar que W_{ij} tiene la forma:

$$W_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \delta_{ij}$$

o sea:

$$\hat{W} = 2\mu\hat{S} + \lambda \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \hat{I} \quad (A.8)$$

con $\hat{S}$ el *tensor de deformaciones* o *tensor de cizalladura*, μ el *coeficiente de viscosidad dinámica*, y λ el *coeficiente de viscosidad dilatacional*. Este último nombre se entiende al tener en cuenta que si δV es el volumen de una partícula de fluido, la variación de su volumen con el tiempo es: $\frac{1}{\delta V} D(\delta V)/Dt = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ (lo que puede obtenerse haciendo $\alpha = 1$ en la expresión (A.4)). Otro modo de escribir el tensor de esfuerzos viscosos es:

$$\hat{W} = 2\mu \left[\hat{S} - \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \hat{I} \right] + \zeta (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \hat{I}$$

con $\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$. La primera parte de esta expresión tiene traza nula. También tiene la propiedad de que se anula para un fluido que se dilata simétricamente, o sea de modo que todas las derivadas de la forma $\partial v_i / \partial x_i$ sean iguales, y que todas las $\partial v_i / \partial x_j$ sean nulas para $i \neq j$. Como en este caso no deben existir fuerzas de fricción, ya que no hay deslizamiento de unas partes del fluido respecto a otras, debe verificarse que $\zeta = 0$ (fluidos maxwellianos) y por tanto:

$$\hat{W} = 2\mu \left[\hat{S} - \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \hat{I} \right] \quad (A.9)$$

A.4 La ecuación del momento

Expresa la ley fundamental de la dinámica para un fluido: la variación total del momento de una porción material de fluido es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre él. Calculemos primero la variación del momento:

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{R(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{R(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] dV$$

que, teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (A.6) es:

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \int_{R(t)} \left[\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] dV$$

Evaluemos ahora las fuerzas que actúan sobre la porción material. La fuerza total es:

$$\int_{R(t)} \rho \vec{f} dV + \oint_{\partial R(t)} \hat{T} d\vec{S}$$

con $\vec{f}$ las fuerzas de volumen ejercidas por unidad de masa. El segundo término representa la acción de las fuerzas de superficie que actúan sobre la superficie que limita el volumen material. Se trata de un vector cuya componente i es:

$$\oint_{\partial R(t)} (\hat{T} d\vec{S})_i = \oint_{\partial R(t)} \sum_j T_{ij} n_j dS = \oint_{\partial R(t)} \vec{t}_i \cdot d\vec{S}$$

siendo $\vec{n}$ el vector unitario en la dirección y sentido del elemento de superficie $d\vec{S}$, y $\vec{t}_i$ el vector cuyas componentes son la fila i de la matriz que representa $\hat{T}$, es decir, la fuerza total ejercida por las fuerzas de superficie sobre una superficie normal al eje X_i . Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\oint_{\partial R(t)} (\hat{T} d\vec{S})_i = \int_{R(t)} \vec{\nabla} \cdot \vec{t}_i dV$$

y por tanto:

$$\oint_{\partial R(t)} \hat{T} d\vec{S} = \int_{R(t)} \vec{\nabla} \cdot \hat{T} dV$$

donde hemos definido la divergencia de $\hat{T}$ como un vector cuya componente i es $\vec{\nabla} \cdot \vec{t}_i$.

La ecuación del momento queda, finalmente:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \hat{T} \quad (A.10)$$

que se conoce como *ecuación de Cauchy*. Sustituyendo la expresión de $\hat{T}$ (A.7):

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \hat{W} \quad (A.11)$$

Para un fluido newtoniano (y maxweliano), teniendo en cuenta (A.9), el último término vale:

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{W} = \mu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \mu \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (A.12)$$

Si el fluido es incompresible, lo que es razonable para líquidos y para gases que se mueven con velocidades mucho menores que la velocidad del sonido:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (A.13)$$

con $\nu = \mu/\rho$ el *coeficiente de viscosidad cinemática*. Esta ecuación se conoce como *ecuación de Navier-Stokes*.

A.5 La ecuación de la energía

Si e es la energía interna específica, la ecuación de la energía en forma integral es:

$$\frac{D}{Dt} \int_{R(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{R(t)} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \oint_{\partial R(t)} \vec{v} \cdot (\hat{T} d\vec{S}) - \oint_{\partial R(t)} \vec{q} \cdot d\vec{S}$$

con $\vec{q}$ el vector flujo de energía, que tiene en cuenta pérdidas de energía por conducción y radiación. Puede demostrarse de modo sencillo que $\vec{v} \cdot (\hat{T} d\vec{S}) = (\hat{T} \vec{v}) \cdot d\vec{S}$, por lo que, aplicando el teorema de la divergencia, los dos últimos términos del segundo miembro quedan:

$$\oint_{\partial R(t)} \vec{v} \cdot (\hat{T} d\vec{S}) - \oint_{\partial R(t)} \vec{q} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial R(t)} (\hat{T} \vec{v} - \vec{q}) \cdot d\vec{S} = \int_{R(t)} \vec{\nabla} \cdot (\hat{T} \vec{v} - \vec{q}) dV$$

con lo que la ecuación de la energía en forma diferencial queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} - \hat{T} \vec{v} + \vec{q} \right] = \rho \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (A.6) obtenemos la llamada *ecuación de la energía total*, que nos da la variación total de la energía en el fluido:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\hat{T} \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \quad (A.14)$$

El primer miembro expresa la variación de energía total en el fluido. En el segundo miembro se incluyen las causas de esta variación: la potencia

realizada por las fuerzas de volumen, la realizada por las fuerzas de superficie, y el ritmo de pérdida de energía debida a flujo conductivo y radiativo.

Como esta ecuación nos da la variación de la energía total del fluido, no nos dice, por separado, qué causas producen variación de la energía interna y qué causas de la energía cinética. En lo que sigue vamos a desdoblar esta ecuación en dos, una para la variación de cada una de estas contribuciones a la energía.

Para estudiar la variación de la energía cinética recurrimos a la ecuación del momento (A.10). Multiplicándola escalarmente por $\vec{v}$ se obtiene:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{T} \right) \cdot \vec{v} \quad (\text{A.15})$$

que expresa el teorema de las fuerzas vivas incluyendo la variación de energía mecánica debida al trabajo realizado por las fuerzas de superficie. Si las fuerzas de volumen son conservativas, entonces $\vec{f} = -\vec{\nabla}\psi$, y esta ecuación queda:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + \psi \right) = \left(\vec{\nabla} \cdot \hat{T} \right) \cdot \vec{v}, \quad (\text{A.16})$$

es la *ecuación de la energía mecánica*.

Para obtener la ecuación que nos de la variación de la energía interna, restamos (A.15) de la ecuación de energía total (A.14):

$$\rho \frac{De}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (\hat{T} \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \hat{T}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\rho \frac{De}{Dt} = \hat{T} : \hat{S} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q}, \quad (\text{A.17})$$

es la *ecuación de la energía del gas*. La operación “contracción” se define $\hat{T} : \hat{S} = \sum_i \sum_j T_{ij} S_{ij}$.

Esta ecuación nos dice que la energía interna del fluido varía a causa del trabajo realizado por las fuerzas internas (de superficie) y por la pérdida por transporte radiativo y conductivo. Teniendo en cuenta la expresión de $\hat{T}$ (A.7) queda:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \Phi - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} \quad (\text{A.18})$$

El primer término es la potencia realizada por la presión, y el último la energía perdida por transporte radiativo y conductivo. $\Phi = \hat{W} : \hat{S}$ es la llamada función de disipación. Esta función es siempre positiva, y da cuenta del trabajo realizado localmente por las fuerzas tangenciales (de fricción), que al ser positivo siempre aumentará la energía interna del gas, o sea su temperatura. La disipación se comporta como una fuente de calor.

En resumen: la ecuación de energía total (A.14) nos expresa la variación total de la energía en el fluido. Esta variación se debe a la potencia realizada por las fuerzas de volumen más la realizada por fuerzas de superficie más la que se pierde por transporte conductivo y radiativo. La primera de ellas se invierte íntegramente en variar la energía cinética (A.15), y la última en variar la energía interna (A.17). En cuanto a la potencia total desarrollada por las fuerzas de superficie, es $\vec{\nabla} \cdot (\hat{T} \vec{v})$, y se puede descomponer en la suma de dos términos: $(\vec{\nabla} \cdot \hat{T}) \cdot \vec{v}$ y $\hat{T} : \hat{S}$, que indican la contribución de este tipo de fuerzas a la variación de energía mecánica [(A.15) y (A.16)] y del gas (A.17), respectivamente. El primer término es, por tanto, el ritmo al que otras partes del fluido realizan trabajo sobre una partícula de fluido, mientras que el segundo es la potencia desarrollada por las fuerzas internas en el seno de la partícula, y se puede dividir a su vez en: $-P \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$, trabajo realizado por la presión (debido a cambio de volumen), y $\Phi = \hat{W} : \hat{S} > 0$, la función de disipación viscosa (A.18).

A.6 La velocidad del sonido: choques y condición de incompresibilidad

Si en un medio homogéneo aplicamos una pequeña perturbación, ésta se propagará por el medio a una cierta velocidad, c_s , dada por:

$$c_s^2 = \frac{dP}{d\rho},$$

que recibe el nombre de velocidad del sonido. En realidad, c_s tiene un significado más general que el introducido aquí: se trata de la velocidad con que se propaga la información en el medio, y por tanto da una idea de la rapidez con la que éste responde a un estímulo externo. Por ejemplo, si el medio tiene un tamaño característico L , el tiempo que tarda un cambio inducido en una región de él en afectar al resto del medio es $\sim L/c_s$. Otro modo de

verlo es que si le aplicamos al medio una perturbación variable en una escala de tiempo T , entonces si $T \gg L/c_s$, el medio en su conjunto es capaz de irse acomodando al nuevo estado, conservando su propiedad de homogeneidad (aunque variable), pero si $T < L/c_s$ entonces el medio no es capaz de ajustarse como un todo al nuevo estado impuesto, cada región variará sus magnitudes físicas de modo distinto y se perderá la homegeneidad.

Si ejercemos una perturbación muy rápida (o muy intensa) en un fluido, entendiendo por esto que la velocidad inducida por ella en el material cumpla $v > c_s$, es decir, se producen flujos supersónicos, entonces aparecen *choques*. Como ese movimiento supersónico es más rápido que el de flujo de la información, el material que se encuentra delante de la propagación no tiene forma de saber que se le acerca material en un estado diferente (incluso muy diferente) de aquel en que él se encuentra, y entonces se produce un salto brusco en las magnitudes físicas de fluido (un frente de choque). Desde un punto de vista matemático (es decir, del modelo de medio continuo) lo que sucede es que aparece una discontinuidad en los campos que describen los valores de las magnitudes físicas; desde el punto de vista físico lo que ocurre es que hay una variación grande de las magnitudes en una distancia del orden del camino libre medio de las partículas. Puede demostrarse que la relación entre los valores de las magnitudes físicas a un lado y otro del frente de choque son:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{M_1^2(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}; \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}$$

con $M_1 = v_1/c_{s,1}$ el llamado número de Mach, y donde el índice 1 indica que se trata de magnitudes medidas en el medio pre-choque, el 2 en el post-choque. Estas expresiones se conocen con el nomnbre de ecuaciones de Rankine-Hugoniot.

Una vez entendido el concepto de velocidad del sonido, es sencillo deducir en qué condiciones un fluido puede ser considerado incompresible. Supongamos que las acciones externas producen en el fluido variaciones de densidad del orden $\Delta\rho$, podremos considerar que el fluido es incompresible cuando se verifique:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1.$$

Las variaciones de densidad están íntimamente ligadas a las de presión, y la relación entre ambas se verifica a través de la velocidad del sonido. En efecto, de la definición de ésta:

$$\Delta P \sim c_s^2 \Delta\rho.$$

Ahora bien, si despreciamos las fuerzas viscosas y asumimos que no hay fuerzas externas (aproximaciones ambas que son razonables en las circunstancias que estamos suponiendo), la ecuación de Cauchy (A.11) puede escribirse:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P,$$

y como:

$$\left| \frac{D\vec{v}}{Dt} \right| \sim \frac{V^2}{L},$$

con V la escala típica de los valores de la velocidad del fluido, ello nos permite obtener una expresión para el orden de magnitud de las variaciones de presión:

$$\Delta P \sim \rho V^2,$$

de donde resulta que:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{\Delta P}{\rho c_s^2} \sim \left(\frac{V}{c_s} \right)^2 = M^2$$

con $M = v/c_s$ el llamado *número de Mach*.

Por tanto, un fluido puede considerarse incompresible cuando $M^2 \ll 1$, es decir, cuando su velocidad es subsónica.